

Giancarlo Buccella

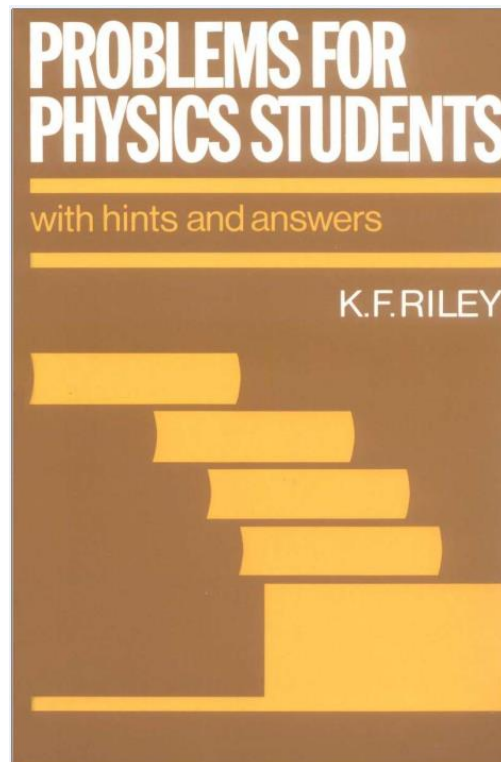
Problemi svolti con il supporto della Intelligenza Artificiale

di *aistudio*, *Chat GPT-5*, *Claude Sonnet 4*

Problemi di fisica svolti e commentati

Tutti i problemi proposti nel testo

Problems for Physics students di K. F. Riley (Cambridge University press – 1982)



La Terra ama la pioggia, la ama anche l'Etere venerabile;

il Mondo ama fare ciò che deve accadere.

Io dico al Mondo: io amo insieme con te.

Marco Aurelio Pensieri (X 21)

Tutte le cose

Vicine o lontane

In modo nascosto

sono legate le une alle altre

Da una forza immortale

Tale che non potete cogliere un fiore

Senza disturbare una stella.

Francis Thompson

Vedere il Mondo in un granello di sabbia

E il cielo in un fiorellino di campo

L'infinito nel palmo della tua mano

E l'eternità in un'ora.

William Blake

Fare scienza è un modo di "amare Dio con tutto il cuore,

con tutta l'anima e con tutta la mente"

Francis Collins

Indice

A Dimesioni fisiche	M Trasferimento di calore
B Meccanica lineare e statica	N Elettrostatica
C Moti rotazionali	O Corrente continua
D Gravitazione	P Corrente alternata
E Moto armonico semplice	Q Campi magnetici e correnti
F Onde	R Elettromagnetismo
G Ottica geometrica	S Nuclei
H Interferenza e diffrazione	T Elettroni, fotoni, atomi
I Struttura e proprietà dei solidi	U Esercizi brevi
J Proprietà dei liquidi	V Esercizi lunghi
K Proprietà dei gas	W Trattamento dati
L Teoria cinetica e fisica statistica	X Stime (Problemi di Fermi)
M Trasferimento di calore	Y Perché o come
	Z Sofismi

Tratto dalla Prefazione del testo

Questo libro si propone di fornire una serie di problemi che metteranno alla prova la comprensione da parte dello studente dei principi che vengono solitamente insegnati in un corso di fisica di livello terziario. Nel Regno Unito, ad esempio, gli argomenti trattati sono quelli che si incontrano tipicamente in un programma di fisica di livello A. La maggior parte del materiale è quindi ciò che è noto come "fisica classica", sebbene tutti i corsi di livello A contengano un po' di "fisica moderna", cioè nuclei, atomi e fotoni. Alcuni programmi di studio di livello A, in particolare quello di Nuffield, contengono anche idee introduttive sugli argomenti più avanzati dell'elettronica, dell'entropia e dell'equazione di Schrödinger, e sono state incluse domande su questi argomenti. Nei paesi che adottano un curriculum scolastico meno specializzato di quello del Regno Unito, il livello del corso pertinente è quello del junior college o dei primi anni di università.

La difficoltà delle domande varia ampiamente, dalla semplice applicazione di una singola idea di base a situazioni piuttosto complesse che implicano l'uso di diverse idee contemporaneamente, alcune delle quali non immediatamente evidenti. Si spera che i problemi più impegnativi mettano alla prova l'acutezza mentale e sviluppino quel senso critico così importante per la formazione di un fisico.

Nella prima parte (sezioni A-T) si è cercato di raggruppare i problemi su aree simili della fisica in un'unica sezione, con le sezioni separate etichettate alfabeticamente. Nella parte successiva, tuttavia, in particolare nelle sezioni U, V, X e Y, è stato fatto un deliberato tentativo di includere problemi che coinvolgono idee provenienti da diverse aree. Le domande considerate più impegnative sono state contrassegnate con un asterisco (*). Sarà quindi evidente che le domande sotto un'unica lettera formano un insieme di problemi generalmente di difficoltà crescente su un'area della fisica, e che quelle con lo stesso numero, ma lettere diverse, formano un insieme approssimativamente uniforme di domande su una varietà di argomenti. Uno studente può quindi approfittare di questa struttura per soddisfare i propri scopi o esigenze individuali.

Per quanto riguarda la scelta del tipo di problemi posti consideriamo, esemplificando, la seguente domanda e risposta.

D. Un cilindro solido uniforme viene messo in rotazione attorno al proprio asse e viene quindi delicatamente appoggiato, con il suo asse orizzontale, su un tavolo orizzontale ruvido. Cosa succede?

R. All'inizio si verifica uno slittamento, ma alla fine questo si ferma e il cilindro rotola dolcemente lungo il tavolo.

La risposta data è, ovviamente, corretta. Ma è chiaro che i principi della fisica alla base dell'analisi della situazione siano stati compresi? La risposta a quest'ultima domanda deve essere "no"; potrebbero esserlo stati, ma non è chiaro che lo siano. Se la domanda originale avesse chiesto se la velocità lineare finale del cilindro dipendesse dalla sua massa, dalla sua velocità angolare iniziale, dal

suo raggio, dal coefficiente di attrito o dall'accelerazione di gravità, o quale frazione dell'energia cinetica iniziale del cilindro venisse dissipata contro l'attrito radente, allora risposte come no, sì, sì, no e no, o $\frac{2}{3}$, rispettivamente, sarebbero chiari indicatori che i principi non solo erano stati compresi ma anche applicati correttamente.

Scopo di questo libro, altrettanto importante della verifica delle soluzioni, è quello della educazione alla *forma mentis* del fisico, lo scopo didattico di questo libro è quello di cercare di far imparare allo studente a farsi le domande corrette, quelle veramente utili ai fini della comprensione e della risoluzione dei problemi proposti.

Decalogo per la risoluzione dei problemi di Fisica

- 1) Leggere attentamente il testo del problema.
- 2) Preparare un elenco completo delle quantità date (note) e di quelle cercate (incognite).
- 3) Disegnare uno schema o un diagramma accurato della situazione. Nei problemi di dinamica, assicurarsi di aver disegnato *tutte* le forze che agiscono su un dato corpo (diagramma di corpo libero).
- 4) Dopo aver deciso quali condizioni e principi fisici utilizzare, *esaminare le relazioni matematiche che sono valide nelle condizioni date*. Assicurarsi sempre che tali relazioni siano applicabili al caso in esame. È molto importante sapere quali sono le limitazioni di validità di ogni relazione o formula.
- 5) Molte volte le incognite sembrano troppe rispetto al numero di equazioni. In tal caso è bene chiedersi, ad esempio:
 - a) esistono altre relazioni matematiche ricavabili dalle condizioni del problema?
 - b) è possibile combinare alcune equazioni per eliminare alcune incognite?
- 6) È buona norma risolvere i problemi in modo simbolico e sostituire i valori numerici soltanto alla fine. Conviene anche mantenere traccia delle unità di misura, poiché questo può servire come controllo.
- 7) Controllare se la soluzione trovata è dimensionalmente corretta.
- 8) Arrotondare il risultato finale allo stesso numero di cifre significative di quello dei dati del problema, tenendo presente comunque che, qualora i dati siano espressi con precisione diversa, il risultato finale non potrà essere più preciso del dato meno preciso.
- 9) Ricordare che per imparare a risolvere bene i problemi è necessario risolverne tanti: la risoluzione dei problemi spesso richiede creatività, ma qualche volta (spesso) si riuscirà a risolvere un problema prendendo lo spunto dal percorso risolutivo di problemi analoghi già svolti.
- 10) Se infine non si riesce ad “imbrocicare” la strada giusta: consultare un qualche testo di esercizi svolti (come quello che avete tra le mani!).

A *Dimensioni fisiche*

Premessa

Le dimensioni fisiche (o grandezze fondamentali) sono le categorie di base con cui si costruiscono tutte le altre quantità fisiche. Esse sono state codificate in 7 grandezze.

Le 7 grandezze fondamentali SI (Sistema Internazionale):

Grandezza	Simbolo dimensionale	Unità SI	Simbolo unità
Lunghezza	L	metro	m
Massa	M	kilogrammo	kg
Tempo	T	secondo	s
Corrente elettrica	I	ampere	A
Temperatura	Θ (theta)	kelvin	K
Quantità di sostanza	N	mole	mol
Intensità luminosa	J	candela	cd

Quando facciamo analisi dimensionale, scriviamo le quantità in termini di simboli delle dimensioni, non delle unità.

Per esempio:

Velocità v : dimensioni = $[LT^{-1}]$

Accelerazione a : $[LT^{-2}]$

Forza F : $ma \Rightarrow [MLT^{-2}]$

Energia E : $F \cdot d \Rightarrow [ML^2T^{-2}]$

Potenza $P = E/t$: $[ML^2T^{-3}]$

L'energia può apparire in molte forme (cinetica, potenziale, elettrica...) ma ha sempre le stesse dimensioni:

$$[E] = [ML^2T^{-2}]$$

Energia cinetica: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [M][L^2T^{-2}]$

Energia potenziale: $E_p = mgh \Rightarrow [M][L][LT^{-2}] = [ML^2T^{-2}]$

Le dimensioni servono a:

Controllare la correttezza di un'equazione fisica $\rightarrow$ ogni membro deve avere le stesse dimensioni.

Fare stima ordini di grandezza (tipico nei problemi Fermi).

N.B. Usare le unità di misura delle grandezze fisiche (come m, s, kg, A...) è non solo lecito, ma spesso anche più comodo, specie quando:

si vuol verificare la coerenza di una formula;

si deve calcolare numericamente una quantità;

si debba lavorare con valori sperimentali o grandezze note.

In effetti, unità di misura e dimensioni sono due facce della stessa medaglia:

A1 Secondo la teoria di Bohr dell'atomo di idrogeno, l'energia di ionizzazione è: $E = m_e e^4 / (8 \epsilon_0^2 h^2)$.
 Mostra che questa espressione ha le dimensioni di un'energia e un valore di 13,6 eV.

Operiamo una analisi dimensionale.

$$\frac{[M][Q]^4}{[\epsilon_0]^2 [h]^2} = \frac{[M][Q]^4}{[Q^4 T^4 M^{-2} L^{-6}][M^2 L^4 T^{-2}]} = \frac{[M][Q]^4}{[Q^4 T^2 L^{-2}]} = [ML^2 T^{-2}]$$

Abbiamo così verificato che l'espressione data ha le dimensioni una energia. Inseriamo i valori numerici e calcoliamo il suo valore.

$$E = \frac{(9.109 \cdot 10^{-31})(1.602 \cdot 10^{-19})^4}{8(8.854 \cdot 10^{-12})^2 (6.626 \cdot 10^{-34})^2} = 2.18 \cdot 10^{-17} J = 13.6 eV$$

A2 La legge di Wiedemann–Franz afferma che, in certe condizioni, la conduttività elettrica σ di un metallo è legata alla sua conduttività termica λ dall'equazione: $\lambda / \sigma T = (\pi^2/3) (k_B / e)^2$. Dove λ è la conduttività termica e σ la conduttività elettrica. Mostra che questa equazione è dimensionalmente corretta. Stima la conduttività termica del rame a temperatura ambiente, sapendo che la sua conduttività elettrica è $\sigma = 5,6 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$.

La conduttività termica ha dimensioni $\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1} = \text{J s}^{-1} \text{ m}^{-1}\text{K}^{-1} = \text{kg m s}^{-3} \text{ K}^{-1}$

La conduttività elettrica ha dimensioni $\text{Sm}^{-1} = \Omega^{-1}\text{m}^{-1} = \text{A}^2 \text{ s}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$

$$[\lambda] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \cdot \text{K}}; [\sigma T] = \left(\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3}{\text{kg} \cdot \text{m}^3} \right) \text{K}$$

$$\frac{[\lambda]}{[\sigma T]} = \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \cdot \text{K}}}{\left(\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3}{\text{kg} \cdot \text{m}^3} \right) \text{K}} = \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^6 \cdot \text{K}^2}$$

Per il secondo membro si ha (tenendo conto che il termine $(\pi^2/3)$ è una costante, quindi ininfluenza ai fini di una analisi dimensionale),

k_B (costante di Boltzmann): $\text{J/K} = \text{kg m}^2/\text{s}^2\text{K}$

e (carica dell'elettrone): A s

$$\left(\frac{k}{e} \right)^2 = \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^6 \cdot \text{K}^2}$$

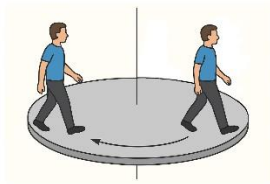
Quindi effettivamente dal punto di vista dimensionale l'uguaglianza sussiste.

Stimiamo la conduttività termica del rame inserendo i valori numerici.

$$\lambda = \sigma T \left(\frac{\pi^2}{3} \right) \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 5,6 \cdot 10^7 \cdot 300 \cdot \frac{3,14^2}{3} \left(\frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right)^2 = 410 \text{ W / mK}$$

Valore coerente con i dati sperimentali.

C7 Una piattaforma girevole orizzontale a forma di disco uniforme di massa **150 kg** è montata su un asse verticale leggero e privo di attrito al suo centro. Due uomini, ciascuno di massa **75 kg**, si trovano alle estremità opposte di un diametro, e sia loro che la piattaforma sono fermi. Gli uomini si muovono quindi attorno alla piattaforma nella stessa direzione e alla stessa velocità costante. Calcolare l'angolo di cui si sono spostati nello spazio quando hanno completato un giro completo della piattaforma.



Il sistema è composto dalla piattaforma e dai due uomini. Poiché non ci sono momenti torcenti esterni che agiscono sul sistema (l'asse è privo di attrito), il momento angolare totale del sistema deve conservarsi. Dato che il sistema è inizialmente fermo, il momento angolare totale iniziale è zero. Di conseguenza, il momento angolare totale finale deve rimanere zero.

$$L_{\text{iniziale}} = L_{\text{finale}} = 0$$

Il momento angolare finale del sistema è la somma del momento angolare della piattaforma e di quello dei due uomini:

$$L_{\text{finale}} = I_p \omega_p + I_u \omega_u = 0$$

dove:

I_p : momento d'inerzia della piattaforma (un disco uniforme), $I_p = \frac{1}{2} M R^2$

I_u : momento d'inerzia dei due uomini (trattati come masse puntiformi a distanza R dal centro), $I_u = m R^2 + m R^2 = 2 m R^2$

Sostituendo i momenti d'inerzia nell'equazione di conservazione:

$$\left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \omega_p + (2 m R^2) \omega_u = 0$$

Semplificando:

$$\frac{1}{2} M \omega_p + 2 m \omega_u = 0$$

La velocità angolare degli uomini rispetto al suolo (ω_u) è la somma della velocità angolare della piattaforma rispetto al suolo (ω_p) e della velocità angolare degli uomini rispetto alla piattaforma ($\omega_{u/p}$):

$$\omega_u = \omega_p + \omega_{u/p}$$

Sostituiamo questa relazione nell'equazione di conservazione:

$$\frac{1}{2}M\omega_p + 2m\left(\omega_p + \omega_{\frac{u}{p}}\right) = 0$$

$$\omega_p\left(\frac{1}{2}M + 2m\right) = -2m\omega_{\frac{u}{p}}$$

$$\omega_p = -\frac{2m}{\frac{1}{2}M + 2m}\omega_{u/p}$$

Poiché le velocità sono costanti, la relazione tra gli angoli percorsi nello stesso intervallo di tempo è identica a quella tra le velocità angolari. Sia:

θ_p : l'angolo percorso dalla piattaforma rispetto al suolo

θ_u : l'angolo percorso dagli uomini rispetto al suolo (la nostra incognita)

$\theta_{u/p}$: l'angolo percorso dagli uomini rispetto alla piattaforma. Il problema ci dice che questo è un giro completo, quindi $\theta_{u/p} = 2\pi$ radianti.

La relazione tra gli angoli è: $\theta_u = \theta_p + \theta_{u/p}$. La relazione tra θ_p e $\theta_{u/p}$ è:

$$\theta_p = -\frac{2m}{\frac{1}{2}M + 2m}\theta_{\frac{u}{p}} = \frac{2 \cdot 75}{\frac{1}{2}150 + 2 \cdot 75}\theta_{\frac{u}{p}}$$

$$\theta_p = -\frac{2}{3}\theta_{u/p}$$

Dato che gli uomini compiono un giro completo rispetto alla piattaforma, $\theta_{u/p} = 2\pi$. L'angolo di rotazione della piattaforma è:

$$\theta_p = -\frac{2}{3}(2\pi) = -\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

Il segno negativo indica che la piattaforma ruota in senso opposto a quello in cui camminano gli uomini. Infatti per camminare in senso antiorario sulla piattaforma, gli uomini devono spingere con i piedi sulla piattaforma in senso orario.

Infine, calcoliamo l'angolo totale percorso dagli uomini rispetto allo spazio (il suolo):

$$\theta_u = \theta_p + \theta_{u/p} = -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{-4\pi + 6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

L'angolo di cui si sono spostati gli uomini nello spazio è $\frac{2\pi}{3}$ radianti, che corrisponde a **120°**.

Nota a margine

L'azione degli uomini: per camminare in senso antiorario sulla piattaforma, gli uomini devono spingere con i piedi sulla piattaforma in senso orario.

La reazione della piattaforma: per il principio di azione e reazione (e per la conservazione del momento angolare), questa spinta in senso orario fa ruotare la piattaforma in senso orario.

La divisione del moto: il "giro completo" che gli uomini fanno è un'interazione tra loro e la piattaforma. Questo moto si "divide" tra i due corpi in base alla loro inerzia rotazionale (il momento d'inerzia, I).

Momento d'inerzia degli uomini ($I_u = 150R^2$): rappresenta la loro "resistenza" a essere messi in rotazione.

Momento d'inerzia della piattaforma ($I_p = 75R^2$): rappresenta la sua "resistenza" a essere messa in rotazione.

Notiamo che in questo problema, l'inerzia combinata degli uomini è il doppio di quella della piattaforma. Questo significa che è più facile far girare la piattaforma che far girare gli uomini.

Quando gli uomini compiono il loro "sforzo" per fare un giro di **360°**, questo sforzo viene ripartito:

Una parte (**1/3** dello sforzo totale) serve a far avanzare gli uomini rispetto al terreno.

Due parti (**2/3** dello sforzo totale) servono a far girare la piattaforma all'indietro.

Ecco perché, per ogni **3°** di "camminata" che gli uomini fanno sulla piattaforma:

La piattaforma ruota all'indietro di **2°**.

Gli uomini avanzano rispetto al terreno di solo **1°**.

Quando gli uomini hanno percorso **360°** sulla piattaforma, i conti tornano:

La piattaforma è ruotata all'indietro di **240°**.

Gli uomini sono avanzati rispetto al terreno di **120°**.

La somma del loro movimento relativo alla piattaforma (**360°**) è data dal loro movimento rispetto al terreno (**120°**) più il movimento del terreno rispetto a loro (la piattaforma che gli è ruotata sotto di **240°**).

L'atto di camminare su di essa la costringe a muoversi in reazione, ma poiché anche gli uomini hanno massa e inerzia, non possono trasferire tutto il loro movimento alla piattaforma. Il risultato è che entrambi si muovono.

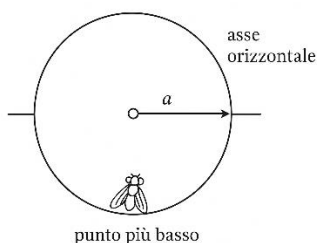
Ovvio considerare che se la piattaforma avesse massa nulla non vi sarebbe spostamento degli uomini rispetto al terreno ma non rispetto alla piattaforma. Infatti dal punto di vista di un osservatore a terra, l'uomo è fermo sul posto, muovendo le gambe, mentre la piattaforma gli gira sotto i piedi. Ma dal punto di vista dell'uomo, lui sta effettivamente camminando e completando un giro rispetto a un punto verniciato sulla piattaforma.

C8 Un disco uniforme (laminato) di raggio a e massa M è montato su cuscinetti privi di attrito con l'asse orizzontale. Il disco è inizialmente a riposo quando una mosca, anch'essa di massa M , si muove orizzontalmente nel piano del disco e si posa senza slittare nel punto più basso del perimetro del disco al tempo $t = 0$. Nella successiva evoluzione il disco ruota per mezzo giro (trascinando con sé la mosca) e poi si arresta.

- (i) Trovare la velocità angolare ω_0 del sistema immediatamente dopo che la mosca si è posata.
(ii) Mostrare che la mosca si trova al livello dell'asse del disco al tempo

$$T = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \sec \frac{\theta}{2} d\theta,$$

(qui θ è l'angolo di rotazione misurato dal punto iniziale).



Chiarimento iniziale.

Il testo dice: “Il vettore velocità della mosca è parallelo al suolo”, e “Il vettore velocità giace nel piano verticale del disco”.

L'unica direzione che soddisfa entrambe le condizioni è una linea orizzontale che è anche tangente al disco nel suo punto più basso. Questo vincolo è cruciale. Assicura che l'impulso fornito dalla mosca sia tangenziale. Un impulso tangenziale applicato a una distanza r dal centro di rotazione crea una coppia (momento torcente) $M = r \times F$ che è esattamente ciò che mette in rotazione il sistema.

(i)

Imponiamo la conservazione del momento angolare attorno all'asse orizzontale del disco (nessuna coppia esterna durante l'urto istantaneo della mosca).

Momento angolare iniziale: la mosca (massa M) si muove orizzontalmente con velocità v al raggio a , quindi

$$L_{\text{iniz}} = Mva. \quad (\text{Il disco è a riposo quindi non contribuisce.})$$

Dopo l'atterraggio, la mosca è solidale col disco (nesso senza slittamento) e l'insieme disc + mosca ruota con velocità angolare ω_0 . Il momento d'inerzia totale rispetto all'asse è

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{disco}} + I_{\text{mosca}} = \frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2,$$

poiché per un disco uniforme $I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}Ma^2$ e la mosca, posta al raggio a , contribuisce con Ma^2 .

Imponendo $L_{iniz} = I_{tot} \omega_0$ otteniamo

$$Mva = \frac{3}{2} Ma^2 \omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{2}{3} \frac{v}{a}}.$$

(Questa è la velocità angolare appena dopo l'atterraggio, espressa in funzione della velocità orizzontale v della mosca prima dell'impatto.)

(ii)

Ora consideriamo l'evoluzione successiva: il disco + mosca ruotano, la mosca sale dal punto più basso verso l'alto (guadagnando energia potenziale) fino a che l'energia cinetica rotazionale si annulla e il sistema si arresta. Useremo la conservazione dell'energia meccanica (assumendo nessuna dissipazione addizionale diversa da quella che consente l'arresto al mezzo giro: il testo dichiara che si arresta dopo mezzo giro quindi i parametri sono tali da farlo).

Sia θ l'angolo di rotazione misurato a partire dalla posizione iniziale (la mosca parte da $\theta = 0$, posizione più bassa). Quando la mosca ha ruotato di un angolo θ , la sua quota verticale rispetto al punto più basso è

$$\Delta z = a(1 - \cos\theta).$$

Energia potenziale guadagnata dalla mosca: $Mg \Delta z = Mga(1 - \cos\theta)$.

Energia cinetica rotazionale del sistema a un generico θ :

$$K(\theta) = \frac{1}{2} I_{tot} \omega(\theta)^2$$

Conservazione dell'energia meccanica (energia iniziale = energia in un generico istante):

$$\frac{1}{2} I_{tot} \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_{tot} \omega(\theta)^2 + Mga(1 - \cos\theta)$$

Da cui

$$\omega(\theta)^2 = \omega_0^2 - \frac{2Mga}{I_{tot}}(1 - \cos\theta) = \omega_0^2 - \frac{2Mga}{\frac{3}{2}Ma^2}(1 - \cos\theta) = \omega_0^2 - \frac{4g}{3a}(1 - \cos\theta)$$

$$\omega(\theta)^2 = \omega_0^2 - \frac{4g}{3a}(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

Il problema dà la condizione fisica che il disco compie mezzo giro ($\theta = \pi$) prima di fermarsi. Se poniamo $\theta = \pi$ nella relazione precedente e imponiamo $\omega(\pi) = 0$ (si arresta al mezzo giro), otteniamo la condizione sul valore iniziale ω_0 :

$$0 = \omega_0^2 - \frac{4g}{3a}(1 - \cos\pi) = \omega_0^2 - \frac{4g}{3a}(1 - (-1)) = \omega_0^2 - \frac{8g}{3a}.$$

Quindi, affinché il sistema si arresti esattamente dopo mezzo giro deve valere

$$\omega_0^2 = \frac{8g}{3a}.$$

Se questa relazione è soddisfatta, la relazione (1) si semplifica notevolmente: usando l'identità $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ e la relazione $\omega_0^2 = \frac{8g}{3a}$,

$$\omega(\theta)^2 = \omega_0^2 - \frac{4g}{3a} \cdot 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = \omega_0^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \omega_0^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Da cui

$$\omega(\theta) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \cos \frac{\theta}{2}.$$

Quindi si ottiene l'equazione differenziale per l'angolo:

$$dt = \frac{d\theta}{\omega_0 \cos(\theta/2)} = \frac{1}{\omega_0} \sec \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Per trovare il tempo T in cui la mosca raggiunge la posizione livello dell'asse dobbiamo porre $\theta = \pi/2$ (la mosca parte da $\theta = 0$ in basso; a $\theta = \pi/2$ è a livello dell'asse). Integrando da 0 a $\pi/2$ otteniamo

$$T = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \sec \frac{\theta}{2} d\theta$$

che è esattamente la formula richiesta.

(Se si volesse, l'integrale si può valutare in forma chiusa: con la sostituzione $u = \tan(\theta/2)$ si ottiene

$$T = \int_0^{\pi/2} \sec \frac{\theta}{2} d\theta = 2\ln(1 + \sqrt{2})$$

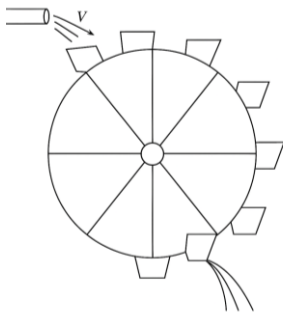
C9 Dell'acqua fluisce con una velocità orizzontale V nei secchi superiori di una ruota da mulino di raggio r e viene rovesciata quando i secchi raggiungono il fondo.

(i) Se la portata massica (quantità di massa di un fluido che attraversa una sezione in un'unità di tempo (kg/s), dell'acqua è M , trovare la coppia (momento torcente) sulla ruota quando questa ha una velocità angolare ω .

(ii) Mostrare che la potenza generata è massima quando $V = 2\omega r$.

(iii) Calcolare l'efficienza teorica del sistema per questa condizione.

Si assuma che l'acqua nei secchi sia distribuita uniformemente e in uno strato sottile attorno alla ruota, e che il centro di gravità di un semicerchio di raggio r si trovi a una distanza $2r/\pi$ dal centro del cerchio corrispondente.



Calcolo della Coppia (Momento Torcente)

La coppia totale che agisce sulla ruota è la somma di due contributi principali: la coppia dovuta all'impatto dell'acqua che entra nei secchi e la coppia dovuta al peso dell'acqua trattenuta nei secchi sul lato discendente.

Coppia dovuta all'impatto dell'acqua (τ_1):

L'acqua si muove orizzontalmente a velocità V e colpisce i secchi che si muovono alla stessa altezza con velocità ωr .

La velocità relativa tra l'acqua e il secchio è $V - \omega r$.

Consideriamo una piccola quantità di massa d'acqua, dm , che colpisce i secchi della ruota. La portata di massa M (espressa in kg/s) è costante. Per definizione è, $M = dm/dt$.

Da cui possiamo scrivere $dm = M dt$.

Prima di colpire il secchio, la massa dm si muove con la velocità orizzontale dell'acqua, V , quindi :

$$d_{pin} = dm V$$

Dopo essere entrata nel secchio, la massa dm si muove insieme al secchio. Il secchio, in quel punto in cima alla ruota, ha una velocità tangenziale orizzontale pari a ωr , quindi: $dp_{fin} = dm \omega r$

$$dp = dp_{fin} - dp_{in} = dm \omega r - dm V = dm (\omega r - V)$$

La forza F' che agisce sulla massa elementare dm è

$$F' = \frac{dp}{dt} = \frac{dm(\omega r - V)}{dt} = M(\omega r - V)$$

Questa è la forza che i secchi esercitano sull'acqua per cambiarne la velocità da V a ωr .

Per il terzo principio della dinamica la forza che l'acqua esercita sui secchi, che è quella che interessa, è uguale in modulo e opposta in verso alla forza che i secchi esercitano sull'acqua.

$$F = -F' = M(V - \omega r)$$

Questa forza è applicata a una distanza r dal centro, quindi la coppia è:

$$\tau_1 = r \times F$$

ma essendo r ed F perpendicolari fra loro il valore in modulo del momento è semplicemente

$$\tau_1 = r F = r M(V - \omega r)$$

Momento dovuto alla gravità (τ_2):

L'acqua riempie i secchi sul lato discendente, dalla cima al fondo della ruota, distribuendosi su un semicerchio.

Il tempo che un secchio impiega per scendere dalla cima al fondo è

$$t = d / v = (\pi r) / (\omega r) = \pi / \omega.$$

La massa totale dell'acqua sul lato discendente è $m_{acqua} = M t = M(\pi / \omega)$.

Nel nostro problema, l'acqua non è un singolo blocco, ma è distribuita lungo la metà discendente della ruota, formando un semicerchio.

Parte dell'acqua è quasi in cima (vicino all'asse verticale) e quindi ha una distanza orizzontale (braccio della leva) quasi nulla.

Parte dell'acqua è a metà discesa (a 90°), alla massima distanza orizzontale possibile, r .

Parte dell'acqua è quasi in fondo, di nuovo con un braccio della leva quasi nullo.

Per calcolare il momento generato dalla forza di gravità su quest'acqua, dovremmo teoricamente sommare il momento di ogni singola goccia d'acqua. Questo richiederebbe un calcolo integrale.

Il problema ci risparmia questa fatica dicendoci: "Guardate che il centro di gravità di tutta quest'acqua distribuita a semicerchio si trova a una distanza orizzontale di $r^* = 2r/\pi$ dall'asse di rotazione".

Questo significa che, ai fini del calcolo del momento, possiamo ignorare la distribuzione reale dell'acqua e immaginare che tutta la massa d'acqua (macqua) sul lato discendente sia concentrata in un unico punto che si trova a quella specifica distanza orizzontale dall'asse.

La forza di gravità che agisce su quest'acqua è $F_2 = m_{\text{acqua}} g = (M\pi g)/\omega$.

Il momento generato da questa forza è:

$$\tau_2 = r(*) F = \frac{2r}{\pi} \frac{M\pi g}{\omega} = \frac{2rMg}{\omega}$$

Il momento totale è la somma dei due momenti:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = rM(V - \omega r) + \frac{2rMg}{\omega}$$

(ii) Potenza Massima

La potenza (P) generata dalla ruota è data dal prodotto della momento totale per la velocità angolare.

$$P = \tau \omega = [Mr(V - \omega r) + 2Mgr/\omega] \omega$$

$$P(\omega) = MrV\omega - Mr^2\omega^2 + 2Mgr \quad (1)$$

Per trovare il valore massimo della potenza, calcoliamo la derivata di P rispetto a ω e la poniamo uguale a zero.

$$dP/d\omega = d/d\omega (MrV\omega - Mr^2\omega^2 + 2Mgr) = MrV - 2Mr^2\omega$$

Ponendo la derivata uguale a zero per trovare il punto stazionario:

$$MrV - 2Mr^2\omega = 0$$

$$MrV = 2Mr^2\omega \quad \text{che implica che sia}$$

$$V = 2 r \omega \quad (2)$$

c.v.d.

Per confermare che si tratta di un massimo, calcoliamo la derivata seconda: $d^2P/d\omega^2 = -2Mr^2$, che è negativa (poiché M e r sono positivi), confermando che la potenza è massima.

(iii) Efficienza Teorica

L'efficienza (η) è il rapporto tra la potenza generata P_{output} e la potenza fornita al sistema P_{input} , calcolata nella condizione di massima potenza ($V = 2\omega r$).

$$\eta = \frac{\text{Potenza generata dal sistema}}{\text{Potenza fornita al sistema}} = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{inp}}}$$

Potenza generata dal sistema (P_{out}), nella condizione di massima potenza:

Per trovare la potenza nella condizione di massimo valore sostituiamo la (2) nella (1):

$$P_{\text{out}} = Mr(2\omega r)\omega - Mr^2\omega^2 + 2Mgr$$

$$P_{\text{out}} = 2Mr^2\omega^2 - Mr^2\omega^2 + 2Mgr$$

$$P_{out} = Mr^2\omega^2 + 2Mgr$$

Potenza fornita al sistema (P_{inp})

La potenza fornita dall'acqua alla ruota del mulino è la somma della sua potenza cinetica e della potenza potenziale che perde cadendo per una distanza verticale di $2r$ (dal punto più alto a quello più basso).

Potenza associata al flusso di energia cinetica (è la rapidità con cui l'energia cinetica viene immessa nel sistema).

$$P_{cinetica} = dK/dt = (d/dt) \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} dm/dt v^2 = \frac{1}{2} Mv^2$$

Potenza associata al flusso di energia potenziale (è la rapidità con cui l'energia potenziale viene persa dall'acqua mentre cade).

$$P_{potenziale} = dU/dt = (d/dt) mgh = dm/dt gh = M g 2r$$

(essendo l'altezza di caduta pari a $2r$)

$$P_{inp} = \frac{1}{2} Mv^2 + 2Mgr$$

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{inp}} = \frac{Mr^2\omega^2 + 2Mgr}{\frac{1}{2}Mv^2 + 2Mgr}$$

Sostituendo $V = 2r \omega$ e semplificando M si ha

$$\eta = \frac{V^2 + 8gr}{2V^2 + 8gr}$$

Se ad es, la velocità dell'acqua del ruscello è di 10 m/s e il raggio della ruota del mulino è 10 m si ha una efficienza teorica massima del 90% , mentre l'efficienza sperimentale di una ruota idraulica ben costruita, si attesta generalmente in un intervallo compreso tra il 60% e l' 85% .

Per esercizio calcoliamo il centro di massa della semicirconferenza di acqua.

Poniamo gli assi coordinati centrato nel centro della ruota e sia l'asse x orizzontale e y verticale.

Sfruttando la simmetria possiamo subito dire che la coordinata x del centro di massa (x_{cm}) è zero:

$$x_{cm} = 0$$

La formula del Centro di Massa per la coordinata y è $y_{cm} = \frac{1}{M} \int y \, dm$

Poniamo: $\lambda = \frac{M}{L}$ dove (λ) è la densità di massa lineare.

Lunghezza totale dell'arco : $L = \pi r$

Elemento infinitesimo di massa : $dm = \lambda dL$

Sostituendo dm nella formula di y_{cm} : $y_{cm} = \frac{1}{\lambda L} \int y(\lambda dL) = \frac{1}{L} \int y dL$

Usando le Coordinate Polari la coordinata y di un punto sull'arco è: $y = r \sin(\theta)$

L'elemento infinitesimo di lunghezza d'arco è: $dL = r d\theta$

L'arco si estende da $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.

Sostituiamo le espressioni in coordinate polari nella formula per y_{cm} :

$$y_{cm} = \frac{1}{L} \int_0^\pi (r \sin \theta)(r d\theta)$$

Sostituiamo $L = \pi r$

$$y_{cm} = \frac{1}{\pi r} r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \quad y_{cm} = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

Risolviamo l'integrale definito: $\int \sin \theta d\theta = -\cos \theta$

Valutiamolo tra 0 e π : $[-\cos \theta]_0^\pi = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = (-(-1)) - (-1) = 1 + 1 = 2$

Ritrovando così il risultato (che il testo del problema aveva dato come valore noto):

$$\boxed{y_{cm} = \frac{2r}{\pi}}$$

X13

(a) Quanto velocemente si può far girare una ruota prima che un elastico teso attorno al suo bordo si stacchi? La circonferenza della ruota è 11 cm e quella dell'elastico non teso è 10 cm. L'elastico, che pesa 4 g, aumenta la sua lunghezza del 15% quando viene appeso come un anello chiuso a un piolo o a un chiodo come supporto con un peso di 50 g attaccato alla sua estremità.

(b) Quanto tempo passerebbe prima che il Sole, il cui diametro sottende circa $\frac{1}{2}^\circ$ visto dalla superficie della Terra, si esaurisca se fosse costituito da carbone che brucia (e avesse una fornitura inesauribile di ossigeno) e continuasse a irradiare alla sua potenza attuale di $4 \cdot 10^{26}$ W. Il calore di combustione del carbone è $3 \cdot 10^7$ J kg⁻¹.

(c) Quante molecole dell'acqua contenuta in un bicchiere bevuta da Giulio Cesare è probabile che si trovino nel prossimo bicchiere d'acqua che berrai?



Calcoliamo per prima cosa la costante elastica dell'elastico considerando l'esperimento del chiodo. Quando l'elastico sostiene una massa $M = 0.05$ kg, la forza peso totale verso il basso è

$$F_p = M g = 0.05 \cdot 9.8 = 0.49 \text{ N.}$$

Poiché l'elastico è un anello chiuso, questa forza è divisa equamente sulle due porzioni verticali, quindi la tensione interna è

$$T = 0.49/2 = 0.245 \text{ N.}$$

L'allungamento è il 15% della lunghezza a riposo $L_0 = 0.1$ m, perciò

$$\Delta L = 0.15 \cdot 0.1 = 0.015 \text{ m.}$$

Troviamo la costante elastica dell'intero anello:

$$k = T/\Delta L = 0.245/0.015 = 16.33 \text{ N/m.}$$

Valutiamo ora l'elastico sul cerchione della ruota. La circonferenza è $L = 0.11 \text{ m}$, quindi l'allungamento rispetto a riposo è $\Delta L_c = 0.11 - 0.1 = 0.01 \text{ m}$.

$$\text{La tensione dell'elastico teso sulla ruota è } T_c = k \cdot \Delta L_c = 16.33 \cdot 0.01 = 0.1633 \text{ N.}$$

L'elastico inizia a staccarsi quando la forza normale tra la gomma e il cerchione si annulla, ovvero quando la tensione fornisce esattamente la forza centripeta necessaria per il moto circolare. Esprimiamo questa condizione limite (*):

$$T_c = \lambda v^2,$$

dove λ è la densità lineare dell'elastico allungato.

$$\text{La densità lineare è: } \lambda = m/L = 0.004/0.11 = 0.0363 \text{ kg/m.}$$

La velocità lineare v è:

$$v = \sqrt{T_c/\lambda} = \sqrt{0.1633/0.0363} = 2.12 \text{ m/s.}$$

Convertiamo questa velocità in frequenza di rotazione:

$$f = v/L = 2.12/0.11 = 19.2 \text{ Hz, che corrisponde al numero di giri al secondo.}$$

(*)

Deriviamo questa formula fondamentale della meccanica che descrive la condizione di distacco di un anello in rotazione.

Consideriamo un piccolissimo segmento dell'elastico di lunghezza Δs e massa Δm , che sottende un angolo molto piccolo $\Delta \theta$ al centro della ruota. Sappiamo che il raggio della ruota è R , quindi possiamo scrivere la lunghezza dell'arco:

$$\Delta s = R \Delta \theta.$$

Esprimiamo la massa di questo pezzettino utilizzando la densità lineare λ , ovvero la massa per unità di lunghezza:

$$\Delta m = \lambda \Delta s = \lambda R \Delta \theta.$$

Osserviamo che questo segmento si muove di moto circolare uniforme con velocità tangenziale v , per cui necessita di una forza centripeta diretta verso il centro:

$$F_c = \Delta m v^2 / R.$$

Sostituiamo la massa nell'equazione della forza centripeta e semplifichiamo il raggio R :

$$F_c = (\lambda R \Delta\theta) v^2 / R = \lambda \Delta\theta v^2.$$

Analizziamo ora quali forze fisiche forniscono questa spinta centripeta. Notiamo che l'elastico è teso, quindi ai due estremi del nostro piccolo segmento agisce la forza di tensione tangenziale T_c . Scomponiamo queste due forze di tensione per trovare la loro componente radiale, cioè quella che punta esattamente verso il centro della ruota. Ricaviamo geometricamente che ciascuna delle due tensioni contribuisce verso il centro con una forza pari a

$$T_c \sin(\Delta\theta/2).$$

Sommiamo i due contributi per ottenere la forza radiale totale:

$$F_r = 2 T_c \sin(\Delta\theta/2).$$

Sfruttiamo l'approssimazione per angoli molto piccoli, per i quali il seno di un angolo si confonde con l'angolo stesso espresso in radianti:

$$\sin(\Delta\theta/2) = \Delta\theta/2.$$

Otteniamo così la forza radiale totale generata dalla sola tensione:

$$F_r = 2 T_c \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) = T_c \Delta\theta.$$

Imponiamo infine la condizione limite richiesta dal problema. Osserviamo che, finché la ruota gira piano, la superficie della ruota stessa fornisce una forza normale verso l'esterno che aiuta a contrastare la tensione, ma nel momento esatto in cui l'elastico sta per allargarsi e staccarsi, il contatto viene meno e la forza normale si annulla completamente. Deduciamo che in quell'istante limite tutta la forza centripeta necessaria al moto circolare deve essere fornita esclusivamente dalla componente radiale della tensione, quindi uguagliamo le due grandezze:

$$F_r = F_c.$$

Sostituiamo i valori calcolati precedentemente:

$$T_c \Delta\theta = \lambda \Delta\theta v^2.$$

Semplifichiamo l'angolo $\Delta\theta$ da entrambi i membri per giungere alla formula finale:

$$T_c = \lambda v^2.$$

Concludiamo notando un fatto fisicamente molto interessante: la tensione interna necessaria per mantenere un anello in rotazione dipende unicamente dalla densità lineare del materiale e dal quadrato della sua velocità tangenziale, in modo del tutto indipendente dal raggio della ruota.

(b)



Ricaviamo innanzitutto le dimensioni fisiche del Sole basandoci sul suo diametro angolare $\theta = 0.5^\circ$ e assumendo nota la distanza media Terra-Sole $D = 1.5 \cdot 10^{11}$ m.

Trasformiamo l'angolo in radianti: $\theta = 0.5 \cdot \pi/180 = 0.0087$ rad.

Calcoliamo il diametro solare, dalla geometria del problema si ha $R = D \tan(\theta/2)$, ma siccome $\theta \ll 1$ possiamo approssimare la tangente con l'angolo stesso, avendosi $R = D (\theta/2)$, da cui

$$2R = d = D \theta = 1.5 \cdot 10^{11} \cdot 0.0087 = 1.3 \cdot 10^9 \text{ m.}$$

$$\text{Il raggio è } R = \frac{d}{2} = 6.5 \cdot 10^8 \text{ m.}$$

Il volume del Sole è:

$$V = \left(\frac{4}{3}\right) \pi R^3 = 1.15 \cdot 10^{27} \text{ m}^3.$$

Assumiamo per il carbone una densità media $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$.

Calcoliamo la massa totale del Sole ipotizzando che sia interamente di carbone:

$$M = \rho V = 1500 \cdot 1.15 \cdot 10^{27} = 1.72 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

(Sembrerebbe venire un valore inferiore alla massa reale del Sole ($2 \cdot 10^{30}$ kg), che essendo composto solo da gas ci si aspetta avere una massa inferiore. Il motivo di questa discrepanza è dovuto alla nostra approssimazione iniziale del calcolo del raggio, in quanto il raggio effettivo del sole è $R = 6.96 \cdot 10^8$ m, Questa piccola differenza viene poi amplificata dal calcolo del volume dove il raggio viene elevato al cubo.)

Troviamo l'energia totale disponibile dalla combustione moltiplicando la massa per il calore di combustione H :

$$E = M \cdot H = 1.72 \cdot 10^{30} \cdot 3 \cdot 10^7 = 5.16 \cdot 10^{37} \text{ J.}$$

Il tempo necessario per esaurire questa energia irradiando alla potenza attuale P è:

$$t = E/P = 5.16 \cdot 10^{37} / (4 \cdot 10^{26}) = 1.29 \cdot 10^{11} \text{ s} = 4095 \text{ anni.}$$

(c)



Tracciamo il percorso di queste molecole d'acqua per capire come arrivano fino a noi. Sappiamo che l'acqua bevuta entra in circolo nel corpo umano e viene in seguito espulsa tramite la respirazione, la sudorazione, le urine o, in ultima istanza, attraverso la decomposizione dei tessuti corporei dopo la morte. Notiamo che, una volta ritornate nell'ambiente esterno, queste molecole entrano inesorabilmente nel ciclo idrologico globale del nostro pianeta. Osserviamo che esse evaporano, entrano nell'atmosfera, precipitano sotto forma di pioggia o neve e infine scorrono attraverso le falde e i fiumi fino a raggiungere i grandi oceani. Consideriamo il fattore tempo: dalla morte del filosofo sono trascorsi oltre duemila e quattrocento anni. Si valuta che il tempo necessario per il rimescolamento completo di tutti gli oceani è dell'ordine di 1000 anni, mentre il rimescolamento completo dell'atmosfera è di circa 10 anni. Concludiamo che, a causa di questo continuo riciclo millenario, le molecole d'acqua originariamente presenti in quella specifica coppa si sono ormai mescolate e distribuite in modo uniforme all'interno di tutta l'idrosfera terrestre. Arriviamo quindi al nocciolo matematico della questione: ai fini del calcolo delle probabilità, il passaggio intermedio all'interno del corpo di Socrate diventa influente nel lunghissimo periodo. Quindi l'esito finale è esattamente lo stesso che si otterrebbe versando il liquido direttamente nell'oceano e attendendo il mescolamento perfetto di tutte le correnti marine.

Poniamo il volume della coppa di acqua bevuta da Giulio Cesare pari a un bicchiere standard $V_c = 0.25$ litri, che corrisponde a una massa d'acqua di 250 g, (massa molare dell'acqua: 18.015 g/mol).

Il numero di moli d'acqua presenti nella tisana è:

$$n = \frac{m(g)}{M_{\text{molare}}} = \frac{250}{18.015} = 13.88 \text{ mol}$$

Il numero di molecole è:

$$N_c = n N_A = 13.88 \cdot 6.022 \cdot 10^{23} = 8.36 \cdot 10^{24} \text{ molecole.}$$

Stimiamo ora la quantità d'acqua totale sulla Terra in cui queste molecole si sono uniformemente mescolate nei secoli. Gli oceani coprono circa il 70% della superficie del pianeta e hanno una profondità media di 4000 m.

Con un raggio terrestre di $6.4 \cdot 10^6$ m, calcoliamo l'area della superficie terrestre:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2 = 5.14 \cdot 10^{14} \text{ m}^2.$$

Il volume globale degli oceani è:

$$V_t = A \cdot 0.7 \cdot 4000 = 1.44 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 = 1.44 \cdot 10^{21} L$$

(vedi il prob, X12 (b))

Calcoliamo il rapporto tra il volume del nostro bicchiere $V_b = 0.25$ litri e il volume totale dell'acqua terrestre:

$$F = 0.25 / (1.44 \cdot 10^{21}) = 1.73 \cdot 10^{-22}.$$

Possiamo dire che la frazione F rappresenta la "concentrazione" dell'acqua bevuta da Giulio Cesare diluita in tutta l'acqua della Terra. In pratica, ci dice quante molecole contenute nel bicchiere ci sono per ogni singola molecola d'acqua nel mondo, quindi moltiplicando per il numero di molecole presenti nel volume del nostro bicchiere (0.25 l) otteniamo il numero "atteso" di molecole della tisana in essa presenti.

$$N_b = N_c \cdot F = 8.36 \cdot 10^{24} \cdot 1.73 \cdot 10^{-22} = 1446 \text{ molecole}.$$

Sottolineiamo che F rappresenta la probabilità che una singola molecola d'acqua scelta a caso dall'idrosfera terrestre sia una di quelle appartenenti al bicchiere originario.

Nel bicchiere attuale sono presenti

$$N = 8.36 \cdot 10^{24}$$

molecole totali

Definiamo la variabile aleatoria

X = numero di molecole "di Cesare" nel bicchiere

Modelliamo ogni molecola come una variabile di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la molecola è "di Cesare"} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con probabilità

$$P(X_i = 1) = F$$

La variabile totale si scrive come somma

$$X = \sum_{i=1}^N X_i$$

Riconosciamo quindi che

$$X \sim \text{Binomiale}(N, F)$$

Il valore atteso è

$$\mathbb{E}[X] = N \cdot F$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\mathbb{E}[X] = 8.36 \cdot 10^{24} \cdot 1.73 \cdot 10^{-22} \approx 1446$$

La varianza della distribuzione binomiale è

$$\text{Var}(X) = N \cdot F \cdot (1 - F)$$

Poiché

$$F \ll 1$$

possiamo approssimare

$$\text{Var}(X) \approx N \cdot F = 1446$$

La deviazione standard è quindi

$$\sigma = \sqrt{1446} \approx 38$$

Dato che

$$N \gg 1, \quad F \ll 1, \quad N \cdot F = \lambda \text{ finito}$$

possiamo passare al limite di Poisson

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

con

$$\lambda = 1446$$

La distribuzione diventa

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Le fluttuazioni relative sono

$$\frac{\sigma}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx 0.026$$

Si conclude che il numero di molecole nel bicchiere non è un valore deterministico, ma una variabile aleatoria con valore atteso

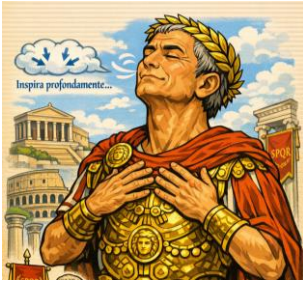
$$X \approx 1446 \pm 38$$

Il risultato rappresenta quindi un valore medio con piccole fluttuazioni relative, che rendono il comportamento macroscopico quasi deterministico pur essendo microscopicamente governato dal caso.

N.B.

Analizziamo per prima cosa la distribuzione fisica dell'acqua sul nostro pianeta. Costatiamo che le molecole non si riversano esclusivamente negli oceani, ma entrano a far parte dell'intera idrosfera: essa comprende mari, ghiacciai, laghi, fiumi, falde acquifere sotterranee e l'atmosfera. Ricordiamo tuttavia, sulla base dei calcoli precedenti (Prob, X12 (b)), che l'atmosfera trattiene una frazione di acqua pari a 10^{-5} del totale terrestre, una quantità del tutto trascurabile. Valutiamo inoltre che gli oceani contengono circa il 97% di tutta l'acqua della terra. Deduciamo che il restante 3% è prevalentemente bloccato nei ghiacciai polari o nelle profondità del sottosuolo. Concludiamo che correggere il volume totale per includere o escludere queste riserve modificherebbe il risultato numerico di un fattore vicinissimo a 1, lasciando del tutto inalterato l'ordine di grandezza finale. Consideriamo ora la questione chimica: ammettiamo che i legami delle molecole d'acqua non sono affatto eterni o indistruttibili. Ricordiamo che organismi viventi, piante e batteri, attraverso il processo della fotosintesi, scindono ininterrottamente le molecole di acqua in ossigeno molecolare e atomi di idrogeno per sintetizzare composti organici. Notiamo parallelamente che i processi di respirazione cellulare e le reazioni di combustione generano continuamente nuove molecole d'acqua come prodotto di scarto. Stimiamo che, nei duemila e quattrocento anni trascorsi dall'epoca di socrate, una porzione significativa di quelle molecole originali sia stata chimicamente frammentata e ricreata infinite volte. Accettiamo di conseguenza che, da un punto di vista strettamente chimico, noi non stiamo bevendo le molecole intatte, ma stiamo calcolando la probabilità statistica di ingerire gli stessi identici atomi che formavano l'acqua in quella tazza. Giustificiamo infine la semplificazione introdotta dall'autore: nei problemi di fisica statistica assumiamo che l'acqua sia un fluido inerte e perfettamente conservativo nel tempo. Risolviamo l'esercizio accettando questa approssimazione ideale, poiché il suo vero scopo didattico è mostrare l'enormità del numero di avogadro: vogliamo dimostrare che la materia è così finemente suddivisa che, perfino diluendo un piccolo bicchiere in tutti gli oceani del mondo, ne peschiamo matematicamente sempre una traccia.

Quante molecole di ossigeno presenti in un atto di espirazione di Giulio Cesare entrano in un nostro singolo atto di respirazione?



Precisiamo un dettaglio biologico iniziale: gli esseri umani inspirano aria contenente circa il 21% di ossigeno ed espirano aria in cui l'ossigeno residuo scende al 16%. Notiamo quindi che Giulio Cesare espirava effettivamente molecole di ossigeno assieme ad anidride carbonica e azoto. Ignoriamo temporaneamente le reazioni chimiche e calcoliamo la probabilità assumendo un rimescolamento perfetto nell'atmosfera.

Un respiro umano ha un volume medio di $V = 0.5$ L, sapendo che una mole di aria occupa un volume di 22.4 L, possiamo ricavare subito il numero di moli di aria presenti nel respiro.

$$n = \frac{V_{resp}}{V_{1mole}} = \frac{0.5}{22.4} = 0.0223 \text{ mol}$$

Il numero di molecole è dato semplicemente da

$$N_{respiro} = n N_A = 0.0223 \cdot 6.022 \cdot 10^{23} = 1.34 \cdot 10^{22} \text{ molecole}$$

Dobbiamo però tener conto che solo il 16% di queste molecole sono di ossigeno:

$$N_{Ossigeno} = n N_A = 1.34 \cdot 10^{22} \cdot 0.16 = 2.14 \cdot 10^{21} \text{ molecole}$$

Calcoliamo il numero di molecole dell'atmosfera.

E' noto che il raggio della Terra è di circa 6400 km, dunque l'aera della superficie terrestre è

$$A_{Terra} = 2 \pi R = 5.15 \cdot 10^{14} \text{ m}^2.$$

Per ricavare la massa e quindi il numero di molecole basta ricordare che la pressione è definita come rapporto fra forza e superfice unitaria rispetto alla quale la forza insiste. Nel caso dell'atmosfera la pressione è quella atmosferica a livello del mare. La pressione atmosferica p_0 a livello del mare non

è la pressione in un punto qualsiasi dell'atmosfera — è il peso dell'intera colonna d'aria che preme su ogni metro quadro di superficie terrestre. Perciò la forza totale esercitata dall'atmosfera sulla Terra è:

$$F_{\text{atm}} = p_0 A = m_{\text{atm}} g$$

Da cui

$$m_{\text{atm}} = \frac{p_0 A}{g} = \frac{10^5 \cdot 5.15 \cdot 10^{14}}{9.8} = 5.26 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

Sapendo che la massa molare (media) dell'aria è 0.029 kg/mol, il numero totale di molecole presenti in atmosfera è

$$N_{\text{atm}} = \frac{m_{\text{atm}}}{M_{\text{mol aria}}} N_A = \frac{5.26 \cdot 10^{18}}{0.029} 6.022 \cdot 10^{23} = 1.09 \cdot 10^{44} \text{ molecole}$$

Le molecole di ossigeno presenti in atmosfera, dove la sua concentrazione è del 21%, è:

$$N_{\text{atm, Ossigeno}} = 0.21 \cdot 1.09 \cdot 10^{44} = 2.29 \cdot 10^{43} \text{ molecole}$$

Assumendo un rimescolamento perfetto ed uniforme dell'atmosfera nel tempo trascorso dalla morte di Giulio Cesare, la probabilità che una singola molecola dell'atmosfera provenga da un respiro di Cesare è

$$p = \frac{N_{\text{ossigeno}}}{N_{\text{atm, ossigeno}}} = \frac{2.14 \cdot 10^{21}}{2.29 \cdot 10^{43}} = 9.35 \cdot 10^{-23}$$

Questa è la probabilità che facendo un respiro una molecola presente in essa sia quella espirata da Giulio Cesare.

(e.g.: è esattamente lo stesso concetto di probabilità classica: se in un sacchetto ci sono 100 palline totali e 3 sono rosse la probabilità di estrarre una pallina rossa è 3/100. Qui il “sacchetto” è l'atmosfera, e le “palline rosse” sono le molecole provenienti da Cesare.)

Nell'atto di un nostro respiro imettiamo, come abbiamo visto $1.34 \cdot 10^{22}$ molecole di cui il 21% sono di ossigeno:

Molecole di ossigeno immesse nel nostro corpo da un singolo atto respiratorio

$$N_{\text{Oss, immesso}} = 0.21 \cdot 1.34 \cdot 10^{22} = 2.81 \cdot 10^{21}$$

La probabilità che in queste N molecole ce ne sia qualcuna emessa dal respiro di Giulio Cesare è

$$N_{\text{atteso}} = p N_{\text{Oss, immesso}} = 9.35 \cdot 10^{-23} \cdot 2.81 \cdot 10^{21} = 0.3 \text{ molecole}$$

In termini pratici: inaliamo circa 1 molecola di Cesare ogni 3-4 respiri.

Per capire cosa succede in un singolo respiro, usiamo la distribuzione di Poisson, che ci dà le probabilità reali:

Probabilità di 0 molecole (74%)

Probabilità di almeno 1 molecola (26%).

Facciamo ora il calcolo della deviazione, esattamente come nel problema precedente.

Partiamo dal valore atteso ottenuto

$$\lambda = 0.3$$

Poiché il numero di molecole segue una distribuzione binomiale nel limite di probabilità piccola e numero di prove grande, possiamo approssimare con una distribuzione di Poisson

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

Per una distribuzione di Poisson la varianza è

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Quindi

$$\text{Var}(X) = 0.3$$

La deviazione standard è

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{0.3} \approx 0.55$$

L'errore assoluto sul risultato finale è quindi

$$\Delta X = \sigma \approx 0.55$$

Il risultato completo si può scrivere come

$$X = (0.3 \pm 0.55)$$

Questo mostra che le fluttuazioni (0.55) sono maggiori del valore medio (0.3), indicando che il risultato è dominato dall'incertezza statistica e che il numero di molecole osservato può variare significativamente da un esperimento all'altro

Abbiamo supposto che le molecole di ossigeno fossero inerti e non si combinassero con altri elementi, ma nella realtà esso è molto reattivo e partecipa a molti cicli, per cui le molecole di ossigeno molecolare espirate da Giulio Cesare molto probabilmente non esistono più in forma libera.

Diverso è il caso dell'azoto che esso si è chimicamente inerte in condizioni normali. Facciamo dunque lo stesso calcolo per l'azoto. Sapendo che la percentuale di azoto presente in atmosfera è del 78%, il numero di esse presenti in un atto di espirazione o inspirazione è

$$N_{\text{azoto}} = N_{\text{respiro}} \cdot 78\% = 1.34 \cdot 10^{22} \cdot 0.78 = 1.05 \cdot 10^{22}$$

Il loro numero in atmosfera è

$$N_{\text{azoto}} = N_{\text{atm}} 78\% = 1.09 \cdot 10^{44} \cdot 0.78 = 8.5 \cdot 10^{43}$$

Pertanto la probabilità è

$$p = \frac{N_{\text{zoto}}}{N_{\text{atm}, \text{azoto}}} = \frac{1.05 \cdot 10^{22}}{8.5 \cdot 10^{43}} = 1.2 \cdot 10^{-22}$$

Il numero atteso è

$$N_{\text{atteso}} = p N_{\text{azoto, immesso}} = 1.2 \cdot 10^{-22} \cdot 1.05 \cdot 10^{22} = 1.3 \text{ molecole}$$

Il risultato per N_2 è il più affidabile essendo inerte, quelle molecole sono ancora integre nell'atmosfera esattamente dove il rimescolamento le ha portate, senza perdite dovute a reazioni chimiche.

Nel capitolo “Azoto” de *Il sistema periodico*, Primo Levi propone un affascinante ragionamento: immagina la storia di una molecola di azoto attraverso il tempo. È un passaggio davvero suggestivo e merita di essere letto.

Osservazione

Notiamo che al posto di Giulio Cesare avremmo potuto scegliere qualsiasi altro organismo vivente: una lucertola, una pianta o un microrganismo preistorico. Gli esseri viventi sono sistemi termodinamici aperti che scambiano continuamente atomi con l'ambiente circostante attraverso processi come la respirazione, la fotosintesi e la nutrizione. Poiché la materia non viene né creata né distrutta ma solo trasformata, osserviamo che gli atomi di cui siamo composti oggi hanno fatto parte di innumerevoli altre forme di vita nel corso dei millenni.

Concludiamo quindi che la distinzione tra individuo e ambiente è, da un punto di vista atomico, estremamente labile: facciamo tutti parte di un unico ciclo biogeochimico in cui ogni alimento di cui ci nutriamo e ogni respiro ci connettono fisicamente alla totalità della storia biologica del nostro pianeta.

Infine perché non chiederci quante molecole di un bicchiere di vino versato nel mare avremo ancora presenti se raccogliessimo un bicchiere di acqua di mare dopo aver supposto un mescolamento omogenea di tutte le acque degli oceani?



Consideriamo un bicchiere di vino di volume $V = 100 \text{ mL} = 0.1 \text{ L}$ e approssimiamo il vino come acqua

massa $\approx 100 \text{ g}$

massa molare dell'acqua $M = 18 \text{ g/mol}$

Numero di moli:

$$n = \frac{100}{18} \approx 5.6$$

Numero di molecole:

$$N_{\text{vino}} = n \cdot N_A \approx 5.6 \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \approx 3.4 \cdot 10^{24}$$

Volume totale degli oceani:

$$V_{\text{oceani}} \approx 1.3 \cdot 10^9 \text{ km}^3 = 1.3 \cdot 10^{21} \text{ L}$$

Massa:

$$m \approx 1.3 \cdot 10^{24} \text{ g}$$

Numero di moli:

$$n_{\text{oceani}} = \frac{1.3 \cdot 10^{24}}{18} \approx 7.2 \cdot 10^{22}$$

Numero totale di molecole:

$$N_{\text{tot}} \approx 7.2 \cdot 10^{22} \cdot 6 \cdot 10^{23} \approx 4.3 \cdot 10^{46}$$

Dopo il mescolamento uniforme, la probabilità che una molecola qualsiasi appartenga al vino iniziale è:

$$p = \frac{N_{\text{vino}}}{N_{\text{tot}}} \approx \frac{3.4 \cdot 10^{24}}{4.3 \cdot 10^{46}} \approx 8 \cdot 10^{-23}$$

Consideriamo un nuovo campione da 100 mL

Numero di molecole:

$$N_{\text{bicchiere}} \approx 3.4 \cdot 10^{24}$$

Definiamo la variabile casuale X come il numero di molecole del vino presenti nel nuovo bicchiere

Distribuzione:

$$X \sim \text{Binomiale}(N_{\text{bicchiere}}, p)$$

Dato che N è molto grande e p è molto piccolo, usiamo l'approssimazione di Poisson

Parametro di Poisson:

$$\begin{aligned}\lambda &= N_{\text{bicchiere}} \cdot p \\ \lambda &\approx 3.4 \cdot 10^{24} \cdot 8 \cdot 10^{-23} \approx 270\end{aligned}$$

Usiamo la distribuzione di Poisson:

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= e^{-\lambda} \\ P(X = 0) &\approx e^{-270} \approx 10^{-117} \\ P(X \geq 1) &= 1 - e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Dato che e^{-270} è trascurabile:

$$P(X \geq 1) \approx 1$$

Conclusione

numero atteso di molecole del vino in un bicchiere: circa 100
probabilità di non trovarne nessuna: praticamente zero
probabilità di trovarne almeno una: praticamente uno (certezza assoluta).

Questo risultato mostra che, nonostante la diluizione estrema, il numero enorme di molecole coinvolte rende praticamente certa la presenza di tracce del campione iniziale in qualsiasi nuovo prelievo macroscopico.

N.B.

Possiamo ragionare in modo diretto:

ogni molecola del bicchiere ha probabilità p di essere “del vino”, quindi il numero medio è:

$$N_{\text{medio}} = N_{\text{bicchiere}} \cdot p$$
$$N_{\text{medio}} \approx 3.4 \cdot 10^{24} \cdot 8 \cdot 10^{-23} \approx 270$$

Quindi ci aspettiamo circa qualche centinaio di molecole del vino

Per avere zero molecole del vino, dovrebbe accadere che:

tutte le $3.4 \cdot 10^{24}$ molecole del bicchiere siano diverse da quelle del vino
cioè ogni estrazione “fallisce”

La probabilità di fallire una volta è:

$$1 - p \approx 1$$

La probabilità di fallire tutte le volte è:

$$(1 - p)^{N_{\text{bicchiere}}}$$

Usiamo l'approssimazione:

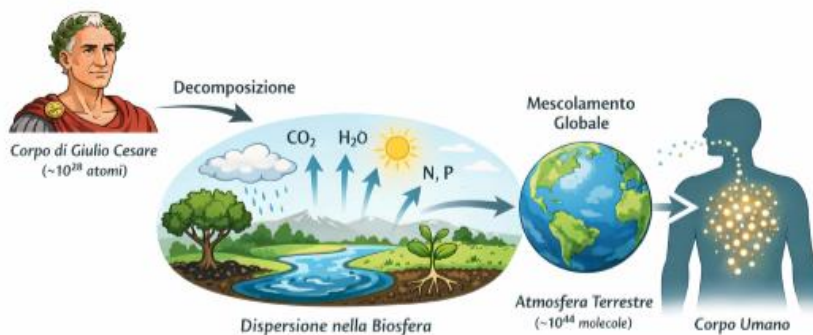
$$(1 - p)^N \approx e^{-N \cdot p}$$

Quindi:

$$P(\text{zero molecole}) \approx e^{-270}$$

Questo numero è praticamente zero.

Alla morte di Giulio Cesare, dopo qualche migliaia o decina di migliaia di anni, tutti gli atomi del suo corpo tornano “in circolazione” della biosfera. Qual'è la probabilità, dopo tale lasso di tempo, che qualche atomo del suo corpo si ritrovi nel corpo di un altro uomo?



Dopo la morte, gli atomi che hanno composto il corpo iniziano un lungo viaggio per ritornare nei cicli biogeochimici della biosfera. Il processo completo di disgregazione totale della materia organica e mineralizzazione delle ossa può richiedere un arco di tempo che va da diversi decenni a diverse migliaia o anche centinaia di migliaia di anni.

1. Autolisi e putrefazione. Subito dopo la morte, iniziano processi interni (autolisi) e l'azione di batteri presenti nell'intestino, e insetti iniziano a decomporre i tessuti. Insetti come mosche e coleotteri, insieme a batteri e funghi, accelerano la disgregazione dei tessuti molli, restituendo al suolo e all'atmosfera elementi come carbonio, azoto e idrogeno.

In circa 10 anni il corpo si riduce a scheletro.

2. Mineralizzazione delle ossa. Le ossa rappresentano l'ultima barriera. Una volta esposto, lo scheletro inizia a disintegrarsi. Il minerale che lo compone, principalmente idrossiapatite (calcio e fosforo) si dissolve lentamente a causa dell'acidità del suolo e dell'acqua.

A volte le ossa possono subire la fossilizzazione (cioè sostituzione parziale o completa degli atomi dello scheletro con minerali presenti nel terreno, diventando perciò delle pietre).

La durata di ogni fase può variare enormemente in base a diversi fattori.

Clima. Il calore e l'umidità accelerano drasticamente la decomposizione, mentre il freddo e la siccità la rallentano o la bloccano .

Tipo di terreno. Terreni acidi accelerano la corrosione delle ossa, mentre terreni alcalini o argillosi possono preservarle più a lungo .

Interramento. La profondità della bara e il tipo di suolo influenzano l'esposizione all'ossigeno e all'acqua, modificando i tempi .

Pratiche funebri. La cremazione accelera istantaneamente il riciclo, mentre l'imbalsamazione e le bare ermetiche possono ritardarlo di decenni.

In sintesi, mentre i tessuti molli si disperdono in pochi anni, le ossa possono rimanere inalterati per un periodo molto più lungo. Si può pensare idealmente che dopo 100.000 anni in una bara ermetica ideale, si avrebbe ancora delle ossa originali quasi intatte ma nessuna vera trasformazione in fossile geologico.

Ma nessuna struttura artificiale oggi sopravvive così a lungo senza decadere; legno, metalli, sigillanti verrebbero corrotti o dissolti molto prima.

Quindi, realisticamente, dopo 100.000 anni la bara probabilmente non sarebbe più ermetica, esponendo il corpo all'acqua e ai minerali del terreno.

Dispersione degli atomi del corpo umano dopo la morte

Quando un essere umano muore, il corpo non scompare davvero: ciò che accade è un lento e complesso processo di trasformazione, attraverso il quale gli atomi che lo componevano ritornano gradualmente nei grandi cicli biogeochimici della Terra. Nulla di ciò che costituisce un corpo umano va perduto; tutto viene riciclato, rielaborato e reintegrato nell'ambiente. Tuttavia, i tempi necessari perché questo avvenga completamente possono variare enormemente, da pochi anni fino a migliaia di anni, a seconda delle condizioni ambientali.

Subito dopo la morte inizia l'autolisi, un processo interno in cui gli enzimi cellulari cominciano a digerire i tessuti dall'interno. A questo si aggiunge la putrefazione, dovuta all'azione dei batteri intestinali, dei funghi e degli insetti necrofagi come mosche e coleotteri. Questi organismi accelerano la decomposizione dei tessuti molli, liberando nell'ambiente elementi come carbonio, idrogeno, ossigeno e azoto, che ritornano rapidamente nell'atmosfera e nel suolo sotto forma di CO₂, acqua e

composti azotati. In condizioni normali, nel giro di circa dieci anni, del corpo rimane soltanto lo scheletro.

Le ossa rappresentano la parte più resistente del corpo umano. Sono costituite principalmente da idrossiapatite, un minerale formato da calcio e fosforo, che si dissolve lentamente a contatto con l'acqua e con l'acidità del terreno. Una volta esposto, lo scheletro inizia a disintegrarsi gradualmente: prima si frattura, poi si polverizza, e infine i suoi componenti minerali si disperdono nel suolo. Questo processo può richiedere da alcune decine a diverse centinaia di anni, a seconda del clima, del tipo di terreno e delle condizioni di sepoltura.

In alcuni casi eccezionali, le ossa possono subire un processo di fossilizzazione. Questo avviene quando i minerali presenti nel terreno sostituiscono progressivamente gli atomi originali dello scheletro, trasformandolo in una vera e propria pietra. Tuttavia, la fossilizzazione richiede condizioni geologiche molto specifiche — come l'assenza di ossigeno, la presenza di sedimenti ricchi di minerali e tempi estremamente lunghi — e non si verifica nelle normali sepolture umane. È un evento raro, più tipico dei resti animali sepolti in ambienti naturali particolari.

I tempi di decomposizione e mineralizzazione dipendono da numerosi fattori. Il clima è uno dei più importanti: il calore e l'umidità accelerano drasticamente la decomposizione, mentre il freddo e la siccità possono rallentarla o addirittura bloccarla. Anche il tipo di terreno gioca un ruolo fondamentale: i terreni acidi corrodono rapidamente le ossa, mentre quelli argillosi o alcalini possono conservarle più a lungo. La profondità della sepoltura, la presenza di ossigeno e acqua, e le pratiche funebri adottate influenzano ulteriormente i tempi. La cremazione, ad esempio, ricicla immediatamente gli atomi del corpo, mentre l'imbalsamazione o le bare ermetiche possono ritardare la decomposizione di decenni. Tuttavia, nessuna struttura artificiale moderna può rimanere ermetica per migliaia di anni: legno, metalli e sigillanti si degradano molto prima, esponendo il corpo agli agenti naturali.

Una volta che anche le ossa si sono disgregate, gli atomi che costituivano il corpo continuano il loro viaggio. Gli elementi più leggeri e volatili — come carbonio, idrogeno, ossigeno e azoto — entrano rapidamente nei cicli dell'atmosfera, dell'acqua e del suolo. Gli elementi minerali delle ossa, come calcio e fosforo, richiedono più tempo per essere completamente reintegrati, poiché devono attraversare processi di dissoluzione, trasporto e assimilazione biologica. Nel complesso, la completa dispersione e integrazione degli atomi del corpo umano nei cicli vitali della Terra richiede in genere da alcune migliaia a diverse decine di migliaia di anni. Solo in condizioni estreme — come nel permafrost, nei deserti iperaridi o nelle torbiere acide — questo processo può estendersi fino a centinaia di migliaia di anni.

In definitiva, mentre i tessuti molli scompaiono in pochi anni e le ossa resistono per decenni o secoli, il destino ultimo di ogni atomo è quello di tornare a circolare nella biosfera. Gli atomi non si distruggono: continuano a esistere e a partecipare ai cicli della vita, dell'atmosfera e della geologia terrestre. Ogni essere vivente, ogni pianta, ogni respiro contiene una parte infinitesimale della materia che un tempo apparteneva a innumerevoli organismi del passato. È un processo lento, ma inesorabile, che lega ogni vita a tutte le altre attraverso il flusso incessante della vita.

In definitiva per rispondere alla domanda del problema iniziale si può dire che molto probabilmente dopo qualche decina di migliaia di anni tutti gli atomi del corpo di Giulio Cesare siano ormai ritornati all'ambiente e quindi molto probabilmente qualcuno di essi sarà presente nel corpo di un altro uomo, se l'uomo sarà ancora presente sulla Terra!

Schema riassuntivo.

Dopo la morte, il corpo umano entra in un lungo processo di trasformazione in cui gli atomi che lo compongono ritornano gradualmente nei cicli biogeochimici della Terra. Nulla di ciò che costituisce un corpo va perduto: gli atomi rimangono, e nel tempo vengono reintegrati nell'atmosfera, nel suolo e negli organismi viventi. Il numero totale di atomi presenti in un corpo umano può essere stimato come:

$$N_{\text{corpo}} \approx 10^{28} \text{ atomi}$$

Il processo inizia con l'autolisi, che ha luogo poche ore dopo la morte, quando gli enzimi cellulari iniziano a degradare i tessuti dall'interno. A questa fase segue la putrefazione, dovuta all'azione di batteri, funghi e insetti necrofagi. I tessuti molli vengono progressivamente disgregati e i loro elementi principali — carbonio, idrogeno, ossigeno e azoto — ritornano nell'ambiente sotto forma di CO_2 , acqua e composti azotati. Il tempo tipico per la completa scomparsa dei tessuti molli è:

$$t_{\text{molli}} \approx 1 - 10 \text{ anni}$$

Dopo questa fase rimane lo scheletro, costituito principalmente da idrossiapatite:



Le ossa sono molto più resistenti dei tessuti molli e la loro disgregazione richiede tempi più lunghi. L'acidità del suolo, l'acqua e i processi chimici naturali dissolvono lentamente i minerali ossei, frammentandoli e restituendo calcio e fosforo al terreno. Il tempo tipico per la mineralizzazione e disgregazione delle ossa è:

$$t_{\text{ossa}} \approx 10 - 500 \text{ anni}$$

In condizioni eccezionali, come ambienti privi di ossigeno o ricchi di sedimenti minerali, può avvenire la fossilizzazione, un processo raro in cui gli atomi originali delle ossa vengono sostituiti da minerali del terreno. La fossilizzazione richiede tempi molto più lunghi:

$$t_{\text{fossile}} \approx 10^3 - 10^6 \text{ anni}$$

I tempi di decomposizione dipendono fortemente da fattori ambientali. Il clima caldo e umido accelera la decomposizione, mentre il freddo e la siccità la rallentano. Anche il tipo di terreno è determinante: i terreni acidi dissolvono rapidamente le ossa, mentre quelli argillosi o alcalini possono conservarle più a lungo. Le pratiche funebri influenzano ulteriormente il processo: la cremazione ricicla immediatamente gli atomi, mentre l'imbalsamazione o le bare ermetiche possono ritardare la decomposizione. Tuttavia, nessuna struttura artificiale moderna può rimanere ermetica per tempi superiori a qualche secolo o millennio.

Una volta disgregate anche le ossa, gli atomi continuano il loro viaggio. Gli elementi volatili (C, H, O, N) entrano rapidamente nei cicli dell'atmosfera e dell'acqua, mentre i minerali delle ossa richiedono tempi più lunghi per essere completamente reintegrati. Il tempo necessario affinché tutti gli atomi del corpo umano vengano completamente dispersi e integrati nella biosfera può essere stimato come:

$$t_{\text{integrazione}} \approx 10^3 - 10^4 \text{ anni}$$

In condizioni estreme, come permafrost o deserti iperaridi, questo tempo può estendersi fino a:

$$t_{\text{max}} \approx 10^5 \text{ anni}$$

In conclusione, mentre i tessuti molli scompaiono in pochi anni e le ossa resistono per decenni o secoli, la completa dispersione degli atomi del corpo umano richiede migliaia di anni. Gli atomi non scompaiono mai: continuano a circolare nella biosfera, partecipando ai cicli della vita e della geologia terrestre.

Ecco uno schema estremamente sintetico a tabella per visualizzare il "viaggio" nel tempo degli atomi di un corpo:

Cronologia della Dispersione Atomica

Fase	Tempo Stimato	Atomi Coinvolti	Destinazione Finale
Tessuti Molli	1 – 10 anni	C, H, O, N (Volatili)	Atmosfera (CO_2), Acqua, Suolo
Scheletro	10 – 500 anni	Ca, P (Minerali)	Terreno, Radici delle piante
Integrazione Totale nell'ambiente	1.000 – 10.000 anni	Tutti	Cicli vitali (Biosfera globale)
Condizioni ambientali estreme	Fino a 100.000 anni	Tutti	Permafrost, Deserti, Torbiere
Fossilizzazione	1.000 – 1.000.000 anni	Tutti (Sostituiti)	Roccia (Restano "bloccati")

Fattori che cambiano i tempi

Fattore	Accelera (Riciclo rapido)	Rallenta (Riciclo lento)
Clima	Caldo e Umido	Freddo e Secco
Terreno	Acido (corrode le ossa)	Alcalino o Argilloso
Pratiche	Cremazione (ore)	Imbalsamazione / Bare ermetiche

In sintesi: Dopo 10.000 anni (tempo ampiamente superato da Giulio Cesare), il rimescolamento è considerato totale. Gli atomi che erano "Cesare" sono ora parte dell'aria, dell'acqua e dei tessuti di ogni essere vivente oggi sul pianeta.

Calcolo della Probabilità

Vogliamo sapere qual è la probabilità che, oggi, nel corpo di un uomo ci sia almeno uno degli atomi che appartenevano al corpo di Giulio Cesare.

$N_C = 10^{28}$ (atomi nel corpo di Cesare).

$N_{tot} = 10^{44}$ (atomi/molecole "scambiabili" nella biosfera/atmosfera in cui gli atomi di Cesare si sono diluiti).

$N_U = 10^{28}$ (atomi nel tuo corpo).

La probabilità che un atomo scelto a caso nella biosfera appartenga a Cesare è:

$$P_{atomo} = \frac{N_C}{N_{tot}} = \frac{10^{28}}{10^{44}} = 10^{-16}.$$

La probabilità che un atomo nel tuo corpo NON sia di Cesare è: $1 - 10^{-16}$.

La probabilità che nessuno dei tuoi 10^{28} atomi appartenga a Cesare è: $(1 - 10^{-16})^{10^{28}}$.

La probabilità che almeno uno dei tuoi atomi sia di Cesare è:

$$P = 1 - (1 - 10^{-16})^{10^{28}}.$$

Utilizzando l'approssimazione esponenziale per numeri così grandi, il risultato è:

$$P \approx 1 - e^{-(10^{-16} \cdot 10^{28})} = 1 - e^{-10^{12}} \approx 1 = 100\%$$

È matematicamente quasi impossibile che il corpo di un uomo di oggi non contenga milioni di atomi che un tempo facevano parte di Giulio Cesare.

Dopo 10.000 anni: Gli atomi si sono già rimescolati a sufficienza. La probabilità che tu abbia almeno un atomo di Cesare è già totale (100%).

Dopo 100.000 anni: Il rimescolamento è ancora più uniforme. Non solo hai "almeno uno" dei suoi atomi, ma statisticamente ne hai circa mille miliardi (10^{12}).

Non è solo probabile, è matematicamente certo. In questo momento, stiamo respirando e ospitando nel tuo corpo milioni di atomi che un tempo facevano parte di Giulio Cesare e/o di qualsiasi altro uomo o essere vivente vissuto migliaia di anni fa.

Il viaggio di questi atomi è iniziato circa 2.000 anni fa. Allora, essi costituivano il calcio delle ossa, il carbonio dei muscoli o l'ossigeno nel sangue del generale romano. Con la sua morte e la successiva decomposizione — come descritto dai cicli biogeochimici — quegli atomi sono tornati "in circolo" nella biosfera.

Successivamente sono passati nel suolo, assorbiti dalle radici del grano, mangiati da animali, evaporati come CO_2 nell'atmosfera, piovuti negli oceani.

Oggi sono entrati nel nostro corpo attraverso l'acqua che beviamo, l'insalata che mangiamo o semplicemente l'aria che respiriamo.

Questo calcolo, ovviamente, non vale solo per Giulio Cesare. Vale per qualsiasi organismo vivente sia vissuto abbastanza a lungo da permettere ai suoi atomi di rimescolarsi (quindi almeno 2.000-5.000 anni fa): da Cleopatra a un anonimo contadino dell'antica Cina, fino ai dinosauri (anche se per loro il rimescolamento è avvenuto in ere geologiche diverse).

Siamo letteralmente fatti di "pezzi" di storia.

È un processo lento, ma inesorabile, che lega ogni vita a tutte le altre attraverso il flusso incessante della vita.

È un cammino paziente e ineluttabile, una danza invisibile che intreccia le ceneri del passato con il battito del presente. In questo flusso incessante, il confine tra l'individualità di un corpo e la vastità del mondo circostante sbiadisce: portiamo dentro di noi il calpestio dei generali, il sudore dei braccianti e il fruscio di foreste antiche, come se ogni nostra cellula fosse un santuario in cui la storia dell'universo si fa presente. Siamo un mosaico di atomi provenienti da esseri viventi che ci hanno preceduto e prima ancora siamo figli delle stelle, poiché esse hanno fabbricato miliardi di anni fa tutti gli atomi presenti sulla Terra. Siamo così uniti da fili d'atomi che nessun tempo può spezzare.

L'aspetto materiale di ogni uomo, ossia gli atomi che compongono il suo corpo, risulta così intrecciato con tutto il resto del cosmo.

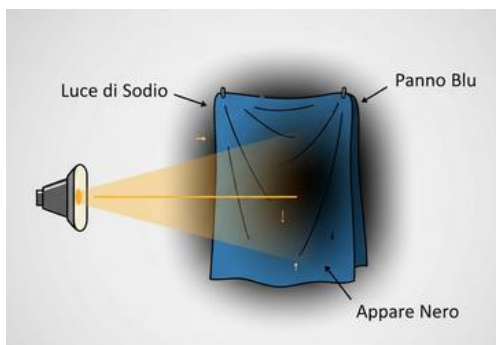
"Siamo impastati di polvere di stelle,
ogni nostro atomo è stato forgiato nel cuore di una supernova.
Non c'è nulla in noi che non sia stato altrove,
nulla che non tornerà a essere parte del tutto." (Erri De Luca)

Y *Perché o come*

Y1

- (a) Perché un panno blu appare nero se osservato sotto la luce al sodio?
- (b) Perché i piselli cuociono più velocemente in una pentola a pressione rispetto a una pentola aperta?
- (c) Come misureresti l'accelerazione di un treno, restando chiuso all'interno di una delle sue carrozze senza finestrini?

(a)



Un panno blu appare nero sotto la luce del sodio per una combinazione di due fattori: la natura della luce emessa e il modo in cui gli oggetti colorati riflettono la luce.

La natura della luce del sodio

Le lampade al sodio (specialmente quelle a bassa pressione, usate spesso per l'illuminazione stradale) emettono una luce monocromatica. Questo significa che emettono luce quasi esclusivamente in una banda strettissima dello spettro visibile: il giallo (corrispondente alle cosiddette "linee D" del sodio, a circa 589 nm).

In questa luce quindi NON sono presenti altri colori come il blu, il verde o il rosso.

Come vediamo il colore blu

Un oggetto ci appare di colore blu perché, quando viene colpito dalla luce bianca (che contiene tutti i colori), i suoi pigmenti assorbono quasi tutte le frequenze (rosso, giallo, verde) e riflettono verso i nostri occhi solo la frequenza del blu. Quando proiettiamo la luce del sodio su un panno blu, accade quanto segue: la luce del sodio invia sul panno solo fotoni gialli.

Il panno blu mentre assorbe tutto lo spettro visibile riflette solamente il blu.

Il panno assorbe, quindi, l'unica luce disponibile (quella gialla), perciò non avendo il blu da riflettere, non rifletterà nessuna frequenza.

Dato che nessuna luce viene riflessa verso l'occhio dell'osservatore, l'oggetto appare privo di colore e di luminosità, ovvero nero.

(b)

Perché i piselli (o altro cibo) cuociono più rapidamente in una pentola a pressione che in una pentola aperta?



I piselli cuociono più rapidamente in una pentola a pressione perché al suo interno la pressione è maggiore di quella atmosferica.

In una pentola aperta l'acqua bolle a circa 100°C alla pressione atmosferica. Quando si raggiunge l'ebollizione, la temperatura dell'acqua non aumenta ulteriormente finché è presente liquido: il calore fornito serve al cambiamento di fase.

In una pentola a pressione, invece, il vapore non può espandersi liberamente e la pressione interna cresce. Poiché la temperatura di ebollizione dipende dalla pressione, aumentando la pressione aumenta anche la temperatura alla quale l'acqua bolle. Tipicamente si possono raggiungere temperature dell'ordine di 120°C . Cuocendo a temperatura più alta, le reazioni chimiche responsabili dell'ammorbidimento dei tessuti vegetali (denaturazione delle proteine, gelatinizzazione dell'amido, rottura delle pareti cellulari) avvengono più rapidamente.

Per questo motivo i piselli cuociono in meno tempo in una pentola a pressione rispetto a una pentola aperta.

Ma la qualità del cibo cotto differisce?

La risposta breve è **sì**, la pentola a pressione influenza sia il valore nutrizionale che il sapore, ma nella maggior parte dei casi lo fa in modo positivo.

Ecco un'analisi dettagliata di come avviene questo processo.

Il Valore Nutrizionale

Contrariamente a un mito diffuso secondo cui le alte temperature "distruggono" i nutrienti, la pentola a pressione è in realtà uno dei metodi di cottura più sani.

Minore perdita di vitamine: È vero che alcune vitamine (come la C e quelle del gruppo B) sono termolabili (si degradano col calore). Tuttavia, il fattore che le danneggia di più è l'esposizione prolungata al calore. Poiché la pentola a pressione riduce drasticamente i tempi di cottura, la perdita vitaminica è spesso inferiore rispetto alla bollitura tradizionale.

Meno dispersione in acqua: Nella bollitura classica, molti sali minerali e vitamine si sciolgono nell'acqua di cottura, che spesso viene buttata. La pentola a pressione richiede pochissima acqua e funziona grazie al vapore; di conseguenza, i nutrienti rimangono all'interno dell'alimento.

Migliore digeribilità (soprattutto per legumi e cereali): Le alte temperature (circa 120°C contro i 100°C della bollitura) sono molto efficaci nell'abbattere gli "antinutrienti" (come l'acido fitico e le lectine) presenti nei legumi, rendendoli più digeribili e permettendo al corpo di assorbire meglio i minerali.

Il Sapore

Anche il gusto subisce dei cambiamenti, generalmente verso una maggiore intensità.

Aromi intrappolati: Poiché la pentola è sigillata ermeticamente, le molecole aromatiche volatili (quelle che senti profumare in cucina quando cucini normalmente) non possono evaporare nell'aria. Rimangono intrappolate nel cibo e nel liquido di cottura, rendendo il sapore molto più concentrato.

Caramelizzazione: A differenza della bollitura (che si ferma a 100°C), la pentola a pressione raggiunge temperature superiori (110-120°C). Questo permette l'inizio delle reazioni di Maillard (quelle che danno il sapore di "arrosto" o tostato), cosa impossibile con la semplice bollitura.

Texture e consistenza:

- *Carni*: Il collagene si scioglie molto più velocemente, rendendo carni dure (come brasati o spezzatini) estremamente tenere in poco tempo.
- *Verdure*: Qui bisogna fare attenzione. Il sapore sarà intenso, ma è facilissimo scuocerle, rendendole molli e meno appetibili se si sbagliano i tempi anche solo di un minuto.

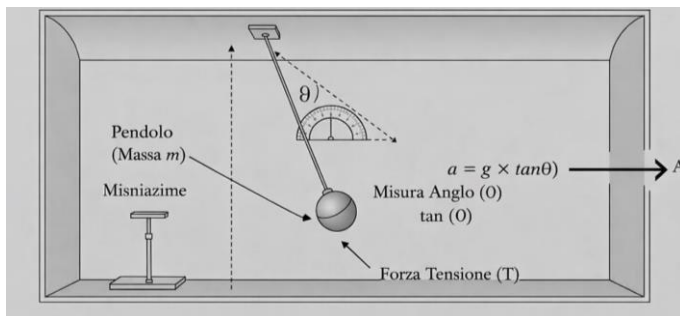
In sintesi

Nutrizione: Migliore rispetto alla bollitura prolungata; preserva vitamine e minerali grazie alla velocità e alla ridotta quantità d'acqua.

Sapore: Più intenso e concentrato, poiché gli aromi non evaporano.

Consiglio: Per ottenere il massimo, usa la pentola a pressione per legumi, cereali integrali, spezzatini e brodi. Per le verdure delicate (come broccoli o asparagi), usa il cestello per la cottura a vapore all'interno della pentola e riduci i tempi al minimo (spesso bastano 2-3 minuti).

(c)



Per misurare l'accelerazione di un treno senza poter guardare all'esterno, dobbiamo sfruttare le forze d'inerzia (o forze apparenti) che si manifestano all'interno di un sistema di riferimento non inerziale (ovvero un sistema che sta accelerando).

Ecco i metodi principali, dal più semplice al più tecnologico:

Il metodo del pendolo (Più preciso e classico)

È il metodo più comune in fisica per una stima diretta.

Appendere un piccolo peso (come una chiave o un anello) a uno spago fissato al soffitto o tenuto fermo con la mano.

Quando il treno accelera, il pendolo non starà più in verticale ma si inclinerà all'indietro di un angolo θ .

Esiste un equilibrio tra la forza di gravità (mg) e la forza d'inerzia ($-ma$). L'accelerazione a si ricava misurando l'angolo di inclinazione:

$$a = g \tan(\theta)$$

Se l'angolo è piccolo, l'accelerazione è proporzionale allo spostamento.

Il metodo della bilancia a molla (Dinamometro)

Posizionare una massa nota m su una superficie orizzontale molto liscia (per ridurre l'attrito) e collegala a un dinamometro fissato a una parete della carrozza rivolta verso la direzione di marcia.

Quando il treno accelera, la massa tenderà a restare ferma per inerzia, tendendo la molla del dinamometro.

Leggendo la forza F indicata sul dinamometro: $a = \frac{F}{m}$

Il metodo dell'accelerometro a liquido

Prendere una bottiglia d'acqua trasparente riempita a metà e appoggiarla su un tavolino perfettamente orizzontale.

Durante l'accelerazione, la superficie del liquido non sarà più parallela al pavimento del treno, ma si inclinerà (il livello dell'acqua salirà nella parte posteriore della bottiglia).

Anche qui, misurando la pendenza della superficie del liquido rispetto alla base della bottiglia, si può risalire all'accelerazione con la stessa formula del pendolo: $a = g \tan(\theta)$.

Utilizzo dello Smartphone (Il metodo moderno)

Tutti gli smartphone moderni contengono un sensore chiamato accelerometro MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems).

Basta scaricare un'app di analisi fisica (come *Phyphox* o *Physics Toolbox*).

Il sensore interno misura microscopiche variazioni di capacità elettrica causate dallo spostamento di una piccola massa inerziale all'interno del chip. L'app mostrerà un grafico in tempo reale dell'accelerazione sui tre assi (x, y, z) con estrema precisione.

Nota concettuale

In tutti questi casi, stiamo applicando il Principio di Equivalenza di Einstein (nella sua forma ristretta): non c'è modo di distinguere, restando all'interno della carrozza, se una forza ci spinge all'indietro perché il treno accelera o perché siamo su una rampa in salita immersi in un campo gravitazionale. Tuttavia, sapendo che il treno viaggia in piano, interpretiamo correttamente ogni spostamento inerziale come accelerazione.

Y2

- (a) Perché, se su uno strumento musicale è necessaria una corda metallica, si usa quella d'acciaio anziché quella di rame?
- (b) Com'è possibile per gli aspiranti astronauti fare esperienza di condizioni di assenza di gravità su un aereo che ha un "soffitto" (quota massima di volo) di soli 15 km?
- (c) Come funziona il tachimetro di un'auto?

(a)

Sappiamo che la frequenza fondamentale f di una corda vibrante tesa tra due punti fissi dipende dalla tensione T , dalla lunghezza L e dalla densità lineare μ secondo la relazione

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Osserviamo che per produrre le note musicali desiderate dobbiamo applicare tensioni molto elevate. Consideriamo a questo punto le caratteristiche meccaniche dei metalli in questione rilevando che il rame è un metallo estremamente duttile e possiede un limite di elasticità relativamente basso. Quindi sotto la forte tensione richiesta, una corda di rame subirebbe una deformazione plastica permanente, allungandosi e perdendo l'accordatura quasi istantaneamente, oppure si spezzerebbe. Scegliamo invece l'acciaio perché presenta un limite di snervamento notevolmente superiore. L'acciaio può sopportare tensioni elevate rimanendo saldamente nel regime elastico, garantendo così una frequenza di vibrazione costante e stabile nel tempo.

(b)

Notiamo innanzitutto che a un'altitudine di 15 km l'accelerazione di gravità g non è affatto nulla, ma assume un valore di circa 9.7 m/s^2 , quindi molto vicino a quello misurato al livello del mare. La sensazione di assenza di peso si spiega attraverso il principio fisico della caduta libera. Si fa percorrere all'aereo una traiettoria parabolica specifica. Si regola la spinta dei motori durante la porzione superiore di questa parabola in modo da compensare esattamente la sola resistenza aerodinamica. Otteniamo in questo modo che l'aereo e tutto ciò che contiene all'interno accelerino verso il basso spinti unicamente dalla forza di gravità terrestre. Poiché i passeggeri e la struttura del velivolo cadono insieme con la medesima accelerazione g , le normali forze di reazione vincolare tra i passeggeri e le

pareti si annullano completamente. Sperimentiamo di conseguenza una condizione di apparente assenza di peso.

(c)

Esaminiamo il funzionamento del classico tachimetro magnetico analogico. Un cavo meccanico flessibile collega l'albero di trasmissione fino al cruscotto. Il cavo ruota a una velocità angolare che risulta direttamente proporzionale alla velocità delle ruote del veicolo. Fissando all'estremità del cavo un magnete permanente si fa ruotare questo magnete all'interno di una coppa metallica, solitamente di alluminio, facendo attenzione a non creare alcun contatto fisico diretto tra i due elementi. Il campo magnetico in rapida variazione induce delle correnti parassite all'interno della coppa di alluminio. Sappiamo che queste correnti generano a loro volta un campo magnetico indotto. Quindi l'interazione tra il campo del magnete rotante e il campo magnetico indotto nella coppa produce un momento torcente elettromagnetico, perciò questo momento tende a far ruotare la coppa nella stessa direzione del magnete. Si contrasta questa rotazione collegando l'albero della coppa a una molla a spirale tarata. La condizione di equilibrio si ha quando il momento torcente elettromagnetico uguaglia il momento torcente di richiamo della molla. Il risultato è che l'angolo di deviazione finale della coppa, e quindi dell'ago indicatore ad essa solidale, risulta proporzionale alla velocità di rotazione del magnete, indicando così in modo preciso la velocità dell'auto.